

קורס השלמה במתמטיקה

פרק 9 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. משוואות טריגונומטריות כלליות.....1
2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית.....4
3. משוואות הנפתרות עי שימוש בזהויות.....6
4. משוואות עם תחום נתון.....8
5. משוואות עם זוויות ברדיאנים.....9

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k$, $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ב.} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ג.} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{א.} \quad \tan x = -1 \quad \text{ב.}$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית) :

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות) :

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3 \sin 2x = 2$

ה. $3 \cos 3x = 1$ ו. $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב) :

א. $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים) :

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג. $\sin x = \sin(120^\circ - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40^\circ - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות) :

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$
- ג. $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$ ד. $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א. $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א. $x = 30^\circ + 180^\circ k$ ב. $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א. $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$
- ב. $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$ ג. $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$ ב. $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$
- ג. $x = -9^\circ + 36^\circ k$ ד. $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$
- ה. $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$ ו. $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א. $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$
- ב. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$ ג. $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א. $x_1 = 180^\circ k$, $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$ ב. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$
- ג. $x = 60^\circ + 180^\circ k$ ד. $x = 90^\circ k$
- ה. $x = 20^\circ + 180^\circ k$ ו. $x = 180^\circ k$ ז. $x = 20^\circ + 60^\circ k$
- (8) א. $x = 180^\circ k$ ב. $x = 90^\circ + 360^\circ k$ ג. $x = 180^\circ + 360^\circ k$
- ד. $x = 90^\circ + 180^\circ k$ ה. $x = 360^\circ k$ ו. $x = 180^\circ + 360^\circ k$
- ז. $x = 180^\circ k$ ח. $x = 45^\circ + 180^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4)$$

$$\tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6)$$

$$\sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8)$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10)$$

$$6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12)$$

$$\tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14)$$

$$\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

תשובות סופיות:

$$. x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$. x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$. x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$. x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$. x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$. x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

משוואות הנפתרות ע"י שימוש בזהויות:

שאלות:

10) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות יסוד):

ב. $\sin x = \cos(x + 45^\circ)$

א. $\sin x = \cos x$

ד. $2 \cos^2 x = 3 \sin x$

ג. $\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x$

ו. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$

ה. $\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4}$

ח. $\sin x - \tan x = 0$

ז. $\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5$

11) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

ב. $\cos 2x = -\cos 3x$

א. $\sin x = -\sin 3x$

ד. $\sin 3x = -\cos(180^\circ - x)$

ג. $\sin(x + 30^\circ) = -\cos x$

12) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (חלוקה בקוסינוס):

ב. $3 \sin x = \cos x$

א. $\sin x = 2 \cos x$

ד. $2 \sin x = -5 \cos x$

ג. $4 \sin x = 7 \cos x$

ו. $3 \sin^2 x = \cos^2 x$

ה. $\sin^2 x = 8 \cos^2 x$

13) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זהויות של זווית כפולה):

ב. $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$

א. $\sin x - \sin 2x = 0$

ד. $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$

ג. $4 \cos x = \sin 2x$

ו. $\cos 2x = 2 \sin x$

ה. $3 \cos x - \cos 2x = 0$

ח. $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ז. $\sin x + \cos 2x = 1$

תשובות סופיות:

(10) א. $x = 45^\circ + 180^\circ k$

ב. $x = 22.5^\circ + 180^\circ k$

ג. $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$

ד. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$

ה. $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$

ו. $x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k$

ז. $x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$ ח. $x = 180^\circ k$

(11) א. $x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k$

ב. $x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k$

ג. $x = 120^\circ + 180^\circ k$

ד. $x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k$

(12) א. $x = 63.43^\circ + 180^\circ k$

ב. $x = 18.43^\circ + 180^\circ k$

ג. $x = 60.25^\circ + 180^\circ k$

ד. $x = -68.19^\circ + 180^\circ k$

ה. $x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k$

ו. $x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k$

(13) א. $x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k$

ב. $x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$

ג. $x = 90^\circ + 180^\circ k$

ד. $x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$

ה. $x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k$ ו. $x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k$

ז. $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k$

ח. $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k$

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

- (1) $[0^\circ:180^\circ]$, $8\sin x - 4 = 0$
- (2) $[-90^\circ:90^\circ]$, $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$
- (3) $[-90^\circ:90^\circ]$, $3\cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$
- (4) $[0^\circ:360^\circ]$, $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$
- (5) $[-30^\circ:30^\circ]$, $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$
- (6) $[0^\circ:180^\circ]$, $2\cos^2 3x = \sin 6x + 1$
- (7) $[-180^\circ:180^\circ]$, $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$
- (8) $[-180^\circ:180^\circ]$, $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$

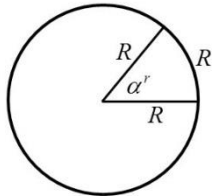
תשובות סופיות:

- (1) $x = 30^\circ, 150^\circ$
- (2) $x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$
- (3) $x = 39.736^\circ, -69.736^\circ$
- (4) $x = 115^\circ, 295^\circ$
- (5) $x = 22.733^\circ$
- (6) $x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ$
- (7) $x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
- (8) $x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ$

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

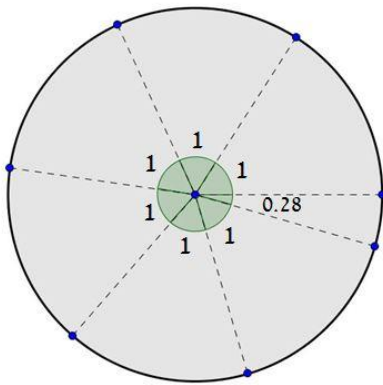
סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R , תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P = 2\pi \cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k$, $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. 30°	ב. 90°	ג. 75°	ד. 120°
ה. 210°	ו. 315°	ז. 18°	ח. 285°
ט. -15°	י. -80°	יא. 510°	יב. -390°

(2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π	ב. 2π	ג. 4π	ד. 1.5π
ה. $\frac{1}{2}\pi$	ו. $\frac{\pi}{4}$	ז. $\frac{\pi}{6}$	ח. $\frac{1}{18}\pi$
ט. $\frac{13}{18}\pi$	י. $\frac{19}{12}\pi$	יא. $1\frac{1}{6}\pi$	יב. $2\frac{1}{4}\pi$

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1$, $\left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$	ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$, $[0 : \pi]$
ג. $3 - 3\tan \frac{x}{2} = 0$, $[0 : 2\pi]$	ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0 : \pi]$
ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$, $\left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$	ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$
ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$, $\left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$	ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$	ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$
ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$, $[0 : \pi]$	ד. $3\sin x \cos x + 3\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$
ה. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$	ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, $[-\pi : \pi]$
ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$, $[-\pi : 0]$	ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$, $[0 : 2\pi]$

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \leq x \leq \pi, \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \leq x \leq \pi, \tan x = 4 \sin x$

ג. $0 \leq x \leq 2\pi, 2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi], \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi], \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi], \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right], \tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \leq x \leq \pi, \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \leq x \leq \pi, \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$
ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$
יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א. 180° ב. 360° ג. 720° ד. 270° ה. 90°
ו. 45° ז. 30° ח. 10° ט. 130° י. 285°
יא. 210° יב. 405°
- (3) א. $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$ ב. $x = \frac{5\pi}{6}$ ג. $x = \frac{\pi}{2}$ ד. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$
ה. $x = 0$ ו. $x = \frac{2\pi}{9}$ ז. $x = 0.0875\pi$ ח. $x = 0.224\pi$
- (4) א. $x = \frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x = 0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ
ה. $x = 0, 0.437\pi$ ו. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
ז. $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$ ח. $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א. $x = \frac{\pi}{8}$ ב. $x = 0, 0.42\pi, \pi$ ג. $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א. $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- (7) א. $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$ ב. $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$
ג. $x = \pm \frac{\pi}{3}$ ד. $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$